

Über Strahlensysteme, welche unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

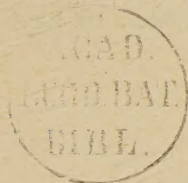
der

K. B. Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt von

Richard Baldus

aus Salonik.



Tag der mündlichen Prüfung: 14. März 1910.

Erlangen.

K. B. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Junge & Sohn.
1910.

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät der
Universität Erlangen.

Referent: Herr Professor Dr. Noether.

Dekan: Herr Geh. Hofrat Professor Dr. Luchs.

Meinem Onkel

Herrn Bauinspektor Johann Hochgrassl

gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
§ 1. Strahlensysteme mit mehrfach unendlich vielen Regel- flächen 2. Grades	2
§ 2. Strahlensysteme, welche einfach unendlich viele Regel- flächen 2. Grades enthalten, mit singulären Kurven	7
§ 3. R-Strahlensysteme mit konfokalen R-Strahlensystemen .	9
§ 4. Der Schnitt eines R-Strahlensystems mit einem linearen Komplex	12
§ 5. Gemeinsame Erzeugung sämtlicher R-Strahlensysteme .	16
§ 6. Die Brennfläche der R-Strahlensysteme	25
§ 7. R-Strahlensysteme, erzeugt durch zwei eindeutig auf- einander bezogene Regelflächen	27
§ 8. Die durch zwei kollineare Regelflächen erzeugten R- Strahlensysteme	34



Digitized by the Internet Archive
in 2026

In seiner Abhandlung über Cremonasche Strahlenkongruenzen weist T. A. Hirst¹⁾ nach, daß die Cremonaschen Kongruenzen 1. Ordnung in ein System von unendlich vielen Regelscharen zerlegt werden können, ferner die Kongruenzen (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5) in mehrere solche Systeme. Die bei einer beliebigen (m, n) Kongruenz, welche ein einstufiges System von Regelscharen enthält, auftretende konfokale (m, n) Kongruenz wird (S. 272) näher betrachtet. Später wurden weitere Strahlensysteme gefunden, welche ebenfalls ∞^1 Regelscharen enthalten, die Strahlensysteme (2, 6) sowohl von der ersten als von der zweiten Art und ihre dualen — während das Strahlensystem (2, 7) kein einstufiges System von Regelscharen enthält²⁾ —, das Strahlensystem (3, 3), das durch die Strahlen entsteht, welche je drei entsprechende Strahlen dreier projektiver Büschel treffen.

Im folgenden sollen nun, was bisher noch nicht geschehen ist, diejenigen irreduktiblen Strahlensysteme im Zusammenhang synthetisch behandelt werden, welche unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten.

¹⁾ On Cremonian Congruences. Proceedings of the London Mathematical Society 1883. Bd. XIV, S. 259—301.

²⁾ Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, II. Teil, S. 85, 87, 100.

§ 1 beschäftigt sich mit denjenigen Strahlensystemen, welche mehrfach unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten. Im § 2 werden die Strahlensysteme mit singulären Kurven behandelt, welche ein einstufiges System von Regelflächen 2. Grades enthalten. Von diesen beiden Gruppen von Kongruenzen wird im folgenden abgesehen. Die noch verbleibenden Strahlensysteme werden als R-Strahlensystem bezeichnet. § 3 handelt von den konfokalen R-Strahlensystemen mit demselben System von Regelflächen 2. Grades. Der in § 4 betrachtete Schnitt eines linearen Komplexes und eines R-Strahlensystems führt in § 5 auf eine gemeinsame Erzeugung sämtlicher R-Strahlensysteme durch eine involutorisch auf sich bezogene Regelfläche. Es ergibt sich der Satz, daß in einem Strahlensystem, welches keine singulären Kurven besitzt und unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthält, die größere der beiden Zahlen Ordnung und Klasse das Dreifache der kleineren nicht übersteigen kann. § 6 enthält auf Grund der in § 5 betrachteten Erzeugung der R-Strahlensysteme die Bestimmung der Ordnung und Klasse der Brennfläche. § 7 und § 8 bringen Beispiele von R-Strahlensystemen, die in § 8 behandelten Strahlenkongruenzen sind spezielle Fälle derjenigen von § 7.

§ 1.

Strahlensysteme mit mehrfach unendlich vielen Regelflächen 2. Grades.

1. Wenn ein Strahlensystem unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthält, dann treten diese entweder als Flächen 2. Klasse auf und können dann in dreierlei Weise ausarten:

- a) in eine Kurve 2. Klasse, die selbst wieder
- b) in zwei Strahlenbüschel in derselben Ebene zerfallen kann,
- c) in zwei Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen mit gemeinsamem Strahl.

In den ersten beiden Fällen vereinigen sich die beiden Scharen von Erzeugenden, während im dritten Fall das zweite System von Erzeugenden aus den Strahlenbüscheln mit denselben Mittelpunkten aber vertauschten Ebenen besteht.

Oder die Regelflächen sind als Flächen 2. Ordnung aufzufassen und können demgemäß dual ausarten:

- a) in einen Kegel 2. Ordnung, der selbst wieder
- b) in zwei Strahlenbüschel mit demselben Mittelpunkt zerfallen kann,
- c) in zwei Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen mit gemeinsamem Strahl.

Auch hier vereinigen sich in den ersten beiden Fällen die beiden Scharen von Erzeugenden, während sich der dritte Fall wie oben verhält.

2. Es sei ein Strahlensystem gegeben, das ∞^2 Regelflächen 2. Grades enthält, so daß durch jeden Kongruenzstrahl g ∞^1 derselben hindurchgehen. Dann besteht das Strahlensystem aus den Erzeugenden dieser ∞^1 Regelflächen. Auf jeder dieser Regelflächen 2. Grades ist eine Schar von Erzeugenden dadurch ausgezeichnet, daß g zu ihr gehört. Da das Strahlensystem irreduktibel sein soll, besteht es aus diesen ∞^1 Scharen von Erzeugenden. In einem Brennpunkt wird g von einem Kongruenzstrahl geschnitten, welcher zu derselben Regelschar wie g gehört, diese Regelschar muß

also ausarten. Dies gilt für jeden Kongruenzstrahl. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

- a) beide Brennpunkte jedes Kongruenzstrahls sind Spitzen von Kegeln 2. Ordnung von Kongruenzstrahlen,
- b) beide Brennebenen sind Ebenen von Kurven 2. Klasse von Kongruenzstrahlen,
- c) durch jeden Brennpunkt geht ein Strahlenbüschel von Kongruenzstrahlen,
- d) auf jedem Kongruenzstrahl ist der eine Brennpunkt die Spitze eines Kegels 2. Ordnung von Kongruenzstrahlen, während durch den anderen Brennpunkt ein Büschel von Kongruenzstrahlen geht,
- e) auf jedem Kongruenzstrahl führt der eine Brennpunkt zu einer Kurve 2. Klasse von Kongruenzstrahlen, während durch den anderen Brennpunkt ein Büschel von Kongruenzstrahlen geht.

Fall a): Jeder Kongruenzstrahl enthält zwei singuläre Punkte, die Kongruenz also eine singuläre Kurve, welche auch aus zwei Teilen bestehen könnte. Jeder Kongruenzstrahl muß die singuläre Kurve in zwei Punkten schneiden, sie muß also auf jeder Regelschar der Kongruenz liegen. Irgend zwei Regelscharen durch g haben außer g noch eine Kurve 3. Ordnung gemeinsam, welche g in zwei Punkten schneidet, den beiden Brennpunkten von g . Dies ist die singuläre Kurve der Kongruenz, die mithin aus den Erzeugenden derselben Schar wie g auf allen Regelflächen besteht, welche durch g und die Kurve 3. Ordnung hindurchgehen, das ist aber die Kongruenz der Doppelsekanten einer Raumkurve 3. Ordnung. Diese wird tatsächlich aus

einem ihrer Punkte durch einen Kegel 2. Ordnung von Kongruenzstrahlen projiziert. Daß umgekehrt jede Doppelsekantenkongruenz einer Raumkurve 3. Ordnung in Regelscharen zerlegt werden kann ist klar: Nimmt man außer den beiden Schnittpunkten der Kurve mit einer Doppelsekante s auf dieser noch einen Punkt und auf der Kurve noch fünf Punkte an, dann gehört jede Regelschar durch diese acht Punkte zur Doppelsekantenkongruenz, denn die Kurve hat mit ihr sieben Punkte gemeinsam. Da der 9. Punkt ganz willkürlich ist, erhält man ∞^1 Regelscharen durch s , welche die Doppelsekantenkongruenz bilden.

Fall b) ist dual zu Fall a).

Fall c): Jeder Punkt der singulären Kurve projiziert diese selbst durch ein Strahlenbüschel. Dann ist das Strahlensystem entweder ein ebenes Feld, in dem man jede Kurve als singuläre Kurve betrachten kann, oder ein lineares Strahlensystem, ein Strahlennetz, bei dem aber, wie sich in Nr. 3 ergeben wird, durch jeden Strahl ∞^2 Regelscharen hindurchgehen.

Fall d): Die Kongruenz enthält zwei singuläre Kurven, deren eine immer durch ein Strahlenbüschel projiziert wird, während die andere immer auf einem Kegel 2. Ordnung liegt. Dies tritt im Fall a) ein, wenn die Raumkurve 3. Ordnung in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfällt.

Fall e) ist dual zu Fall d).

Es ergibt sich somit:

Die einzige Kongruenz, bei welcher durch jeden Kongruenzstrahl ∞^1 Regelflächen 2. Grades von Kongruenzstrahlen hindurchgehen ist die Doppelsekantenkongruenz einer Raumkurve 3. Ordnung, sowie die zu ihr duale.

3. Es mögen durch jeden Kongruenzstrahl $s \infty^2$ Regelflächen 2. Grades hindurchgehen. ∞^2 Regelflächen enthalten ∞^3 Erzeugende, also einen Komplex. Da sie aber eine Kongruenz bilden sollen, müssen durch jede weitere Erzeugende $t \infty^1$ dieser Regelflächen hindurchgehen. Mehr können nicht hindurchgehen, da sonst die ∞^2 Regelflächen zusammenfallen würden. Die Kongruenz besteht wieder aus den Erzeugenden derselben Art wie s auf diesen Regelflächen 2. Grades. Jeder Punkt, in dem sich zwei Strahlen des Systems schneiden ist wieder ein singulärer Punkt bzw. führt er auf eine singuläre Ebene. Zwei Regelflächen 2. Grades, welche zwei Erzeugende derselben Art gemeinsam haben, schneiden sich in zwei weiteren Erzeugenden der anderen Art. Diese beiden Erzeugenden der zweiten Art sind, wenn es sich um singuläre Punkte handelt singuläre Kurven, da durch jeden ihrer Punkte zwei Kongruenzstrahlen hindurchgehen. Als solche müssen sie die Brennpunkte von s und t enthalten. Das Strahlensystem ist ein Strahlennetz. Da dieses zu sich selbst dual ist, ist damit auch der Fall der singulären Ebenen erledigt. Beim Strahlennetz gehen tatsächlich durch jeden Kongruenzstrahl ∞^2 Regelscharen, denn greift man auf ihm einen Punkt heraus, so führt jeder Strahl des Strahlenbündels in diesem Punkt in Verbindung mit den beiden singulären Geraden auf eine Regelschar des Strahlennetzes.

Das Strahlennetz ist das einzige Strahlensystem, in dem durch jeden Strahl ∞^2 Regelflächen 2. Grades von Kongruenzstrahlen hindurchgehen.

4. Es können nicht ∞^3 oder mehr Regelflächen 2. Grades durch jeden Strahl des Systems hindurch-

gehen, denn angenommen es gehen ∞^3 durch jeden Strahl g , dann liegen auf diesen ∞^4 Erzeugende derselben Art wie g . Durch eine solche Erzeugende h müssen ∞^2 von den ∞^3 Regelflächen hindurchgehen, damit sich das System der ∞^4 Erzeugenden auf eine Strahlenkongruenz reduziert. Irgend zwei dieser ∞^2 Regelflächen 2. Grades liefern, wie in Nr. 3, zwei gerade Linien als singuläre Kurve des Systems, durch welche nur ∞^1 Regelflächen 2. Grades hindurchgehen können, da durch ein räumliches Vierseit nur ∞^1 Regelflächen 2. Grades gelegt werden können. Man bekäme also ∞^1 solche singuläre Kurven, wenn man sämtliche ∞^3 Regelflächen durch s berücksichtigt, das Strahlensystem besäße ∞^1 singuläre Linien. Nr. 2 und Nr. 3 geben also die einzigen Strahlensysteme mit mehrfach unendlich vielen Regelflächen 2. Grades an.

§ 2.

Strahlensysteme, welche einfach unendlich viele Regelflächen 2. Grades enthalten, mit singulären Kurven.

5. Ein Strahlensystem kann eine singuläre Kurve besitzen, welche von jedem Strahl des Systems einmal geschnitten wird, während der andere Brennpunkt des Strahles auf der Brennfläche liegt. Diese singuläre Kurve muß demnach auf allen Regelflächen 2. Grades liegen. Man kann drei Fälle unterscheiden:

- a) Das Strahlensystem besteht aus ∞^1 von den ∞^6 Regelflächen 2. Grades, welche sich durch eine Gerade g hindurchlegen lassen und zwar aus den Erzeugenden derjenigen Scharen, zu welchen g nicht gehört,

- b) Das Strahlensystem besteht aus ∞^1 von den ∞^4 Regelflächen 2. Grades, welche sich durch einen Kegelschnitt hindurchlegen lassen.
- c) Das Strahlensystem besteht aus ∞^1 von den ∞^2 Regelflächen 2. Grades, welche sich durch eine Raumkurve 3. Ordnung hindurchlegen lassen. Auf jeder solchen Regelfläche schneidet die eine Schar von Erzeugenden die Raumkurve 3. Ordnung in zwei Punkten, die andere nur je in einem Punkt. Die Kongruenzstrahlen gehören sämtlich zu diesen zweiten Scharen.

6. Ein Strahlensystem kann zwei singuläre Kurven enthalten, welche von einem Strahle des Systems in je einem Punkte geschnitten werden oder die singuläre Kurve besteht aus einem Teil und wird von den Kongruenzstrahlen doppelt geschnitten. Dies muß bei einem irreduktiblen Strahlensystem für jeden Strahl gelten. Irgend zwei Regelflächen 2. Grades schneiden sich in einer Raumkurve 4. Ordnung, welche zunächst als nicht zerfallend vorausgesetzt werde. Da jeder Strahl des Systems die singuläre Kurve schneidet, muß diese Kurve 4. Ordnung die singuläre Kurve des Systems darstellen und alle Regelflächen 2. Grades müssen durch sie hindurchgehen. Das Strahlensystem besteht aus den ∞^2 Erzeugenden eines Büschels von Flächen 2. Grades. Die Raumkurve 4. Ordnung kann zerfallen. Dann gilt das eben Gesagte nicht mehr in folgenden beiden Fällen: die singuläre Kurve der Kongruenz besteht aus einem Teile der zerfallenden Kurve 4. Ordnung und wird von jedem Kongruenzstrahl doppelt geschnitten, oder sie besteht aus zwei Teilen, welche je einfach geschnitten werden und

welche zusammen noch nicht die Raumkurve 4. Ordnung geben. Der erste Fall liefert nur dann ein Strahlensystem, welches kein ebenes Feld ist, wenn die Raumkurve 4. Ordnung in eine Gerade und eine Raumkurve 3. Ordnung zerfällt. Dies führt auf die Doppelsekantenkongruenz der Raumkurve 3. Ordnung, welche nach Nr. 2 von ∞^2 Regelscharen durchzogen wird. Der zweite Fall kann einen Kegelschnitt und eine Gerade als singuläre Kurve liefern. Dies führt auf die Doppelsekantenkongruenz einer zerfallenden Raumkurve 3. Ordnung. Endlich kann es sich noch um zwei Gerade als singuläre Kurven handeln d. h. um ein Strahlennetz, welches nach Nr. 3 von ∞^3 Regelscharen durchzogen wird. Folglich gilt der Satz:

Das einzige Strahlensystem, in dem jeder Strahl zwei singuläre Punkte enthält und welches von ∞^1 Regelflächen 2. Grades durchzogen wird, ist das System der Erzeugenden eines Büschels von Flächen 2. Grades.

Der duale Satz ist klar.

§ 3.

R-Strahlensysteme mit konfokalen R-Strahlensystemen.

7. Im folgenden soll von den in Nr. 2, 3, 5, 6 behandelten Strahlensystemen Abstand genommen werden. Die so verbleibenden Strahlensysteme, welche also ∞^1 Regelflächen 2. Grades durchzogen werden und welche keine singulären Kurven und Torsen von singulären Ebenen besitzen, mögen der Kürze halber R-Strahlensysteme heißen. Dann läßt sich zeigen, daß es kein R-Strahlensystem gibt, bei dem durch jeden Strahl des Systems $k > 1$ Regelflächen 2. Grades hin-

durchgehen. Der Beweis dieses Satzes, der im folgenden vorausgesetzt wird, wird in Nr. 38 nachgetragen werden.

8. Gehört zu einem R-Strahlensystem C von jeder Regelfläche 2. Grades immer nur die eine Schar von Erzeugenden, dann bilden die zweiten Scharen von Erzeugenden eine R-Strahlenkongruenz C' , welche zu C in enger Beziehung steht: Gehen durch einen Punkt m Strahlen von C , dann gehen durch ihn ebensoviele Regelscharen und infolgedessen auch ebensoviele Strahlen von C' . Enthält eine Ebene n Strahlen von C , so ist sie Tangentialebene an ebensoviele Regelscharen und enthält folglich auch n Strahlen von C' . Gehen durch einen Punkt zwei benachbarte Strahlen von C , dann gehen durch ihn auch zwei benachbarte Strahlen von C' , d. h.

Gehört zu einem R-Strahlensystem C von jeder Regelfläche 2. Grades nur die eine Schar von Erzeugenden, dann besitzt es ein konfokales R-Strahlensystem C' von derselben Ordnung m , Klasse n und demselben Rang r wie C , mit den gleichen singulären Ebenen und Punkten.

Daß der Rang r der beiden Kongruenzen (m, n) derselbe ist, folgt daraus, daß sie dieselbe Brennfläche von der Ordnung m_1 haben. Dann ist ihr Rang¹⁾

$$r = n(m-1) - \frac{m_1}{2}.$$

Die singulären Kegel und die Kurven in den singulären Ebenen sind im allgemeinen nicht dieselben.

9. Artet eine der Regelflächen 2. Grades so aus, daß ihre Regelschar mit der Leitschar zusammenfällt,

¹⁾ Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie II, S. 8.

dann ist sie beiden Kongruenzen gemeinsam. Das tritt beim Kegel 2. Ordnung und bei der Kurve 2. Klasse ein. Für die übrigen singulären Punkte ist zu bemerken: S_h sei die Spitze eines singulären Kegels hter Ordnung von C . Dann gehört er zu allen Regelflächen 2. Grades, da sonst das Strahlensystem reductibel wäre. Eine Ebene durch S_h enthält h Kongruenzstrahlen durch S_h und $n-h$ weitere Strahlen. Diese letzteren Strahlen sind Erzeugende auf Regelflächen 2. Grades, welche durch S_h hindurchgehen, infolgedessen liefert jede solche Erzeugende eine Erzeugende der anderen Schar durch S_h , welche zu C gehört.

Ein singulärer Punkt S_h von C , welcher nicht Träger einer zerfallenden Regelschar ist, ist für C singulär vom Grade $n-h$.

Das Duale gilt für singuläre Ebenen.

10. Durch jeden singulären Punkt, welcher nicht durch das Ausarten einer Regelschar entsteht, gehen sämtliche Regelflächen 2. Grades hindurch. Das Duale gilt für die singulären Ebenen. Da unendlich viele Flächen 2. Grades, welche nicht eine Kurve oder einen Torsus von Tangentialebenen gemeinsam haben, höchstens acht gemeinsame Punkte haben können oder sieben gemeinsame Punkte und eine gemeinsame Tangentialebene, sechs Punkte und zwei Ebenen u. s. w., so folgt:

Die Summe der singulären Punkte und Ebenen eines R -Strahlensystems, welche nicht durch ausgeartete Regelflächen 2. Grades entstehen, kann acht nicht überschreiten.

§ 4.

Der Schnitt eines R-Strahlensystems mit einem linearen Komplex.

11. Es sei ein R-Strahlensystem C von der eben behandelten Art und damit auch sein konfokales C' gegeben. Als Regelscharen mögen diejenigen Scharen von Erzeugenden auf den Regelflächen 2. Grades bezeichnet werden, welche zu C gehören, während die Leitscharen die Kongruenz C' bilden. Ein Komplex p ten Grades und eine Regelfläche q ten Grades haben pq gemeinsame Gerade, bei einer Regelfläche 2. Grades liefert jede Schar von Erzeugenden $2p$ gemeinsame Gerade. Γ sei ein linearer Komplex. Jede Leitschar von C' hat mit Γ zwei Gerade g, g_1 gemeinsam, welche durch die Regelschar von C projektiv aufeinander bezogen sind. Die Gesamtheit dieser Geraden g, g_1 ist der Schnitt des R-Strahlensystems C' mit dem linearen Komplex Γ . Durch ihre projektive Beziehung entsteht das Strahlensystem C . Das Strahlensystem (m', n') C' hat mit einem linearen Komplex eine Regelfläche R^n vom Grade

$$n = m' + n'$$

gemeinsam. Es sei vorausgesetzt, daß die Regelscharen des R-Strahlensystems als Flächen 2. Klasse auftreten (vgl. Nr. 1). Je zwei Erzeugende von R^n , welche auf derselben Leitschar von C' liegen, sind einander involutorisch zugeordnet, die Punktreihen auf ihnen projektiv und die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte erzeugen die Kongruenz C . Treten die Regelscharen als Flächen 2. Ordnung auf, dann kann das Strahlensystem in dualer Weise erzeugt werden durch die Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen der Fläche R^n . Da es ∞^5 lineare Komplexe gibt, folgt:

Jedes R-Strahlensystem kann auf ∞^5 Arten durch eine involutorisch eindeutig auf sich bezogene Regelfläche erzeugt werden, und zwar entweder als die Gesamtheit der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte derselben, oder als Gesamtheit der Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen.

Warum die beiden Fälle in dieser Weise zu trennen sind, wird am Schluß der nächsten Nummer gezeigt werden.

12. Die Regelscharen sollen wieder als Flächen 2. Klasse auftreten, dann hat die involutorische Beziehung der R^n folgende Eigenschaften: Durch einen einfachen Punkt P der R^n geht eine Erzeugende hindurch, durch diese eine Leitschar, welche mit der R^n eine zweite Erzeugende gemeinsam hat, die der ersten entspricht und auf der P_1 liegen muß. Die Regelschar bestimmt die projektive Beziehung der beiden Erzeugenden. Wenn nun der lineare Komplex Γ mit einer Leitschar zwei zusammenfallende Gerade gemeinsam hat, dann führt dies auf eine sich selbst entsprechende Erzeugende der R^n , und zwar entspricht sie sich nach dem Vorhergehenden punktweise selbst und liefert zu dem Strahlensystem C eine Regelschar.

Singularitäten kommen in die involutorische Beziehung nur durch ausgeartete Leitscharen herein:

- a) Artet eine Leitschar in eine Kurve 2. Klasse aus, dann fällt sie mit der Regelschar zusammen. Dies führt auf sich schneidende entsprechende Erzeugende der R^n . An ihrer projektiven Beziehung ändert sich dabei nichts.
- b) Zerfällt diese Kurve 2. Klasse in zwei Strahlenbüschel, dann artet die projektive Beziehung

der sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden aus: in der Ebene der beiden Strahlenbüschel von C' liegt ein Strahlenbüschel des Komplexes, welches mit jedem der beiden Büschel einen Strahl gemeinsam hat. Die projektive Beziehung dieser beiden entsprechenden Erzeugenden der R^n artet also in der Weise aus, daß einem Punkte der einen (dem Zentrum des Strahlenbüschels von C' auf ihr) die sämtlichen Punkte der anderen entsprechen und umgekehrt.

- c) Artet eine Leitschar in zwei Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen mit gemeinsamem Strahl aus, dann besteht die Regelschar aus den beiden Strahlenbüscheln, welche den Mittelpunkt mit einem Büschel, die Ebene mit dem anderen gemeinsam haben. Man erhält so sich entsprechende windschiefe Erzeugende der R^n , deren projektive Beziehung wieder ausartet, indem einem Punkt der einen Erzeugenden die sämtlichen Punkte der anderen entsprechen und umgekehrt.

Würde die Regelschar in einen Kegel 2. Ordnung ausarten, dann gäbe dies zwei sich schneidende entsprechende Erzeugende der R^n , deren projektive Beziehung in folgender Weise ausartet: der Schnittpunkt entspricht sich selbst und zugleich entsprechen ihm als Punkt der einen Erzeugenden sämtliche Punkte der anderen. Umgekehrt aber erzeugen diese so aufeinander bezogenen Erzeugenden nicht den Kegel 2. Ordnung, sondern nur sich selbst je unendlichfach. Daher ist der Fall, in dem die Regelscharen als Flächen 2. Ordnung auftreten, dual zu behandeln. Im folgenden

wird vorausgesetzt, daß die Regelscharen als Flächen 2. Klasse auftreten.

13. Singuläre Kegel und singuläre Ebenen der Kongruenz, welche sich nicht unter den in Nr. 12 behandelten befinden und zu welchen auch solche singuläre Ebenen 2. Klasse gehören, welche nicht im System der Regelscharen enthalten sind, beeinflussen die involutorische Beziehung nicht. Doch ist folgendes zu bemerken: Die Spitze eines singulären Kegels von C ist nach Nr. 8 und 9 zugleich Spitze eines solchen von C' . Das Strahlenbüschel von I' , das sein Zentrum in der Spitze des Kegels hat, hat mit dem Kegel von C' so viele Erzeugende gemeinsam, als die Ordnung des Kegels beträgt. Dies sind Erzeugende von R^n . Also liegt die Spitze jedes singulären Kegels von C auf der Fläche R^n , dual ist jede singuläre Ebene von C Tangentialebene von R^n .

14. Gehört zum R -Strahlensystem auch die zweite Schar von Erzeugenden jeder Regelfläche 2. Grades, dann besteht der Schnitt R^n des linearen Komplexes mit dem Strahlensystem aus den vier Erzeugenden jeder Fläche 2. Grades, welche von den beiden Scharen von Erzeugenden auf ihr herrühren. Die R^n ist wieder in ganz derselben Weise involutorisch auf sich bezogen. Jede der in Nr. 12 a) erwähnten Erzeugenden zählt jedoch doppelt, desgleichen jede der Erzeugenden b). Je zwei Paare der unter c) erwähnten Erzeugenden bilden ein windschiefes Vierseit, dessen Ecken die singulären Punkte sind. Damit fällt die Spezialisierung fort, welche zu Anfang von Nr. 11 eingeführt wurde, ohne daß sich an der involutorischen Beziehung etwas

Wesentliches ändert, die Entwicklungen der folgenden Paragraphen gelten also auch für solche R-Strahlensysteme, welche aus beiden Scharen von Erzeugenden ihres Systems von Regelflächen 2. Grades bestehen.

§ 5.

Gemeinsame Erzeugung sämtlicher R-Strahlensysteme.

15. Wenn eine Regelfläche R^n involutorisch eindeutig so auf sich bezogen ist, daß den Punkten auf einer Erzeugenden projektiv die Punkte einer anderen Erzeugenden entsprechen, dann bilden die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte ein Strahlensystem, welches von unendlich vielen Regelflächen 2. Grades durchzogen wird, ein R-Strahlensystem, solange es keine singuläre Kurve und keinen Torsus von singulären Ebenen besitzt¹⁾. Aus Nr. 11 folgt, daß unter diesen Strahlensystemen und den dual erzeugten alle R-Strahlensysteme enthalten sind.

Die Regelfläche R^n habe den Grad n , ihr Geschlecht sei p , einer ebenen Schnittkurve (N) der R^n entspreche involutorisch eine Kurve (S) von der Ordnung s . Nach Nr. 12 sind folgende spezielle Annahmen zulässig: es seien

„ Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden vorhanden, deren projektive Beziehung nicht ausartet (Nr. 11, a),

¹⁾ So führt z. B. die involutorisch eindeutige Beziehung einer Regelfläche 2. Grades R^2 auf sich, in welcher jede Schar von Erzeugenden involutorisch in sich übergeführt wird, zum Strahlennetz, welches nicht zu den R-Strahlensystemen gehört. Auf der R^2 liegt ein windschiefes Vierseit von sich selbst entsprechenden Erzeugenden, dessen beide Diagonalen die Achsen des Strahlennetzes sind.

λ sich selbst punktweise entsprechende Erzeugende e , welche je eine Regelschar von Kongruenzstrahlen liefern,

2μ Fundamentalpunkte D , denen sämtliche Punkte einer Erzeugenden entsprechen, während auf dieser Erzeugenden wieder ein solcher Fundamentalpunkt liegt, dem seinerseits sämtliche Punkte der Erzeugenden durch D entsprechen, dabei schneiden sich die beiden Erzeugenden (11, b)

2ν Fundamentalpunkte F , für welche dasselbe wie für die D gilt, nur schneiden sich hier die beiden Erzeugenden nicht (11, c).

Andere Fundamentalpunkte als die D und F sind nicht vorhanden, außer den Erzeugenden e gibt es keine sich selbst entsprechenden Erzeugenden, die Punkte der Erzeugenden e sind die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte ¹⁾.

16. Es läßt sich sofort eine Beziehung zwischen n , κ , λ , μ angeben, indem man direkt die Anzahl der sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden bestimmt: Schneidet man die R^n mit zwei beliebigen

¹⁾ Ein einfacher Fall einer solchen involutorischen Beziehung ist folgende Transformation einer R^2 in sich: die eine Schar von Erzeugenden wird involutorisch in sich übergeführt, es ist ferner ein beliebiges Ebenenbüschel mit der Achse g gegeben und es sollen den Punkten von R^2 in irgendeiner Ebene dieses Büschels Punkte in derselben Ebene entsprechen. Es treten hier zwei Erzeugende e auf und zwei Punkte F , die Schnittpunkte von g mit der R^2 . Man findet, daß einem Kegelschnitt eine Kurve 4. Ordnung entspricht und daß das erzeugte Strahlensystem ein Strahlennetz ist, dessen eine Achse g ist, während die andere Achse die Schnittlinie der beiden Ebenen ist, welche die Punkte F mit ihren entsprechenden Erzeugenden verbinden.

Ebenen α, β , die sich in einer Geraden g schneiden, dann sind die beiden Schnittkurven durch die Erzeugenden der Fläche eindeutig aufeinander bezogen. Andererseits ist jede Schnittkurve durch die involutorische Beziehung der Erzeugenden auf sich eindeutig involutorisch bezogen. In dem Strahlenbüschel durch einen Punkt von g in der Ebene α entsteht eine involutorische Korrespondenz $[n]$ dadurch, daß jedem Strahl die n Strahlen nach den entsprechenden Punkten der Schnittkurve entsprechen. Diese Korrespondenz hat $2n$ Koinzidenzen, zu welchen die Strahlen nach den Schnittpunkten der λ Erzeugenden e gehören. Die übrigen Koinzidenzen zählen doppelt, da sich in einem solchen Koinzidenzstrahl immer ein Strahl mit zwei seiner entsprechenden vereinigt. Durch jeden Punkt P von g gibt es also $n - \frac{\lambda}{2}$ Strahlen, welche die Schnittkurve der R^n mit α in zwei entsprechenden Punkten schneiden. Die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte in β schneidet g in einem Punkt P_1 . Diese Punkte PP_1 liefern eine $[n - \frac{\lambda}{2}, n - \frac{\lambda}{2}]$ Korrespondenz, deren $2n - \lambda$ Koinzidenzen auf die sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden der R^n führen. Zu den Koinzidenzen gehören die n Schnittpunkte von g mit der R^n , welche auf keine solchen Paare von Erzeugenden führen. Auf der Regelfläche R^n gibt es also $n - \lambda$ Paare von sich scheidenden entsprechenden Erzeugenden. Andererseits ist die Anzahl dieser Paare $\kappa + \mu$, d. h.

$$n = \kappa + \lambda + \mu \quad (1)$$

Es ist zu bemerken, daß jede Erzeugende e aus zwei zusammenfallenden windschiefen Geraden besteht, da

sie zwei zusammenfallende Erzeugende derselben Schar einer R^2 darstellt. Deshalb dürfen die Erzeugenden e bei der Anzahl der sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden nicht mitgezählt werden.

17. Eine beliebige Ebene ε schneidet die R^n in einer Kurve (N) n ter Ordnung, welcher nach Nr. 15 eine Kurve (S) von der Ordnung s entspricht. Die Schnittpunkte der Kurve (S) mit ε führen auf die Kongruenzstrahlen in ε , d. h. auf die Klasse der Kongruenz. Da jeder Punkt einer Erzeugenden e nach Nr. 15 sich selbst entspricht, geht die Kurve (S) durch die λ Schnittpunkte der Erzeugenden e mit der Kurve (N) hindurch. Diese Schnittpunkte liefern keine Kongruenzstrahlen. Der einem der verbleibenden $s - \lambda$ Schnittpunkte entsprechende Punkt muß vermöge der involutorischen Beziehung auch ein Schnittpunkt sein, so daß also immer zwei Schnittpunkte eine Erzeugende liefern, d. h.:

$$\text{Die Kongruenz hat die Klasse } n' = \frac{s - \lambda}{2}. \quad (2)$$

18. Eine Erzeugende e ist der Grenzfall von zwei zusammenfallenden, projektiv aufeinander bezogenen Erzeugenden. Berücksichtigt man dies, dann kann man sich geometrisch davon überzeugen, daß die Kurve (S) durch den Schnittpunkt von e mit (N) hindurchgehen muß. Jeder Punkt A einer Erzeugenden e wird durch einen Kongruenzstrahl l von bestimmter Richtung mit seinem mit ihm zusammenfallenden Punkt verbunden. Legt man eine Ebene ε durch l und zieht man noch die benachbarte Regelschar des Strahlensystems in Betracht, welche auf der R^n die zwei zu

e in beiden Richtungen benachbarten Erzeugenden bestimmt, dann sieht man wieder geometrisch, daß (S) in diesem Falle in A die Ebene ε zur Schmiegungsebene hat, daß also A unter den Schnittpunkten von (S) mit ε für drei Punkte zählt. Es liegen also noch $\frac{1}{2}(s-3-(\lambda-1)) = \frac{s-\lambda}{2} - 1$ Kongruenzstrahlen außer 1 in ε , was an sich klar ist.

19. Eine beliebige Kurve (S) hat die Ordnung s und, da sie eindeutig auf die Kurve (N) bezogen ist, wie diese das Geschlecht p. Im allgemeinen hat sie keine Spitzen. Sie schneidet jede Erzeugende in einem Punkt, geht durch die Schnittpunkte der Ebene von (N) mit den λ Erzeugenden e hindurch und hat (vgl. Nr. 15) jeden Punkt D und F zum einfachen Punkt. Der Kegel, der sie aus irgend einem Punkt projiziert, hat die Ordnung s. Bezeichnet man mit h_s die Anzahl seiner Doppelerzeugenden, dann ist nach den Plückerschen Formeln

$$2 h_s = s(s-3) - 2(p-1). \quad (3)$$

Die Klasse des Kegels ist

$$r_s = 2(s+p-1). \quad (4)$$

20. Es soll die Ordnung m' der Kongruenz bestimmt werden¹⁾. Man projiziert die Fläche R^n aus einem Raumpunkt P in eine Ebene ε . Einem Punkt A von ε entsprechen dann n Punkte A_ν , denn die Gerade PA schneidet die R^n in n Punkten, deren entsprechende aus P projiziert die Punkte A_ν liefern.

¹⁾ Der Grundgedanke in der hier folgenden Bestimmung der sich selbst entsprechenden Punkte einer in sich transformierten Ebene stammt von H. G. Zeuthen. Comptes rendus Bd. 78 (1874) S. 1553.

Unter den n Punkten, welche jedem A_r entsprechen, befindet sich immer auch der Punkt A . Einer Geraden g von ε entspricht eine Kurve s ter Ordnung (S') . Die Schnittlinien e' der Ebenen (Pe) mit ε entsprechen sich punktweise selbst. Jedem Punkt B auf g entsprechen n Punkte B_r auf (S') , umgekehrt entspricht jedem Punkt B_r auf (S') ein Punkt B auf g . In einem Strahlenbüschel um einen beliebigen Punkt O von ε entsteht durch die entsprechenden Punkte auf g und (S') eine $[n, s]$ Korrespondenz, deren $n + s$ Koinzidenzen auf die $n + s$ Punkte C von g führen, von deren entsprechenden Punkten C_r einer auf dem Strahl CO liegt. Zu diesen Punkten gehören die Schnittpunkte von g mit den Geraden e' . Sieht man von diesen ab, so folgt: zu einem Punkt O gehört eine Kurve (K) von der Ordnung $n + s - \lambda$, welche von Paaren entsprechender Punkte gebildet wird, die je auf einem Strahle durch O liegen. O ist für diese Kurve ein n facher Punkt. Geht die Kurve durch einen Punkt A , dann geht sie wegen der involutorischen Beziehung auch durch seinen entsprechenden Punkt A_r auf AO . Durch die entsprechenden Punkte auf (K) entsteht in dem Strahlenbüschel in einem beliebigen Punkte M eine involutorische Korrespondenz $[n + s - \lambda]$ mit $2[n + s - \lambda]$ Koinzidenzen, welche auf die Punkte in der Ebene ε führen, welche mit einem ihrer entsprechenden Punkte zusammenfallen und damit auf die Kongruenzstrahlen durch P . Dabei ist folgendes zu beachten: Dem Strahl MO entsprechen die n Strahlen nach den Punkten O_r , also ist MO eine $s - \lambda$ fach zu zählende Koinzidenz, welche keine sich selbst entsprechenden Punkte liefert. (K) schneidet jede Gerade e' in $n + s - \lambda$ Punkten. Diese Schnittpunkte sind näher zu untersuchen. Jedem

Punkte von e' entsprechen außer ihm selbst noch $n - 1$ Punkte, die auf einer Kurve $s - 1$ ter Ordnung liegen. Es ist dies die Projektion derjenigen Kurve von R^n , welche der Restkurve der Tangentialebene (Oe) der Regelfläche entspricht. Die oben auf die Gerade g angewendete Schlußweise ergibt $n + s - \lambda - 1$ Koinzidenzen, d. h. so oft kommt es vor, daß ein Punkt C von e' einen seiner $n - 1$ entsprechenden Punkte C_r , welche nicht mit ihm zusammenfallen, auf dem Strahl CO hat. Nun kommt es aber einmal vor, daß auch einer der $n - 1$ übrigen Punkte C_r mit C zusammenfällt, nämlich bei demjenigen Punkte T' von e' , welcher die Projektion des Berührungspunktes T der Tangentialebene (Oe) der Regelfläche ist, da $T'P$ Tangente an die R^n in einem Punkte von e ist. Es sind also tatsächlich nur $n + s - \lambda - 2$ Punkte C auf e' vorhanden von der Eigenschaft, daß ein von C verschiedener ihm entsprechender Punkt C_r auf dem Strahl CO liegt. (K) schneidet e' in $n + s - \lambda$ Punkten, zwei von diesen sind also sich selbst entsprechende Punkte von (K) auf e' , welche keine Kongruenzstrahlen durch P liefern. Es verbleiben also noch $2n + s - 3\lambda$ Koinzidenzen auf (K), welche die Kongruenzstrahlen durch P bestimmen. B sei ein solcher sich selbst entsprechender Punkt von (K). Einer Geraden durch B entspricht eine Kurve s ter Ordnung, welche in B einen Doppelpunkt hat. Die oben für g durchgeführte Schlußweise ergibt, daß auch (K) in B einen Doppelpunkt hat. Dann zählt aber jede dieser Koinzidenzen nach einem Punkte B doppelt, d. h.:

Die Ordnung der Kongruenz ist $m' = n + \frac{s}{2} - \frac{3}{2}\lambda$ ¹⁾. (5)

¹⁾ Die Gleichungen (2) und (5) ergeben, auf den in der An-

21. Ein Punkt von R^n werde als Pol desjenigen Kongruenzstrahles bezeichnet, welcher ihn mit seinem entsprechenden Punkte verbindet. Jeder Kongruenzstrahl enthält dann zwei Pole. Die Pole aller Kongruenzstrahlen, welche eine Gerade g schneiden, bilden eine Kurve (G) , welche jede Erzeugende zweimal schneidet. (G) hat mit einer Ebene durch g die $s - \lambda$ Pole der Kongruenzstrahlen in ihr gemeinsam und außerdem noch die n Schnittpunkte von g mit der R^n .

Die Kurve (G) hat die Ordnung $n + s - \lambda$.

Die Kongruenzstrahlen, welche die Gerade g schneiden, bilden eine Regelfläche R_g , ihre Pole liegen auf (G) . Die Kurve (G) ist durch die Erzeugenden von R_g involutorisch auf sich bezogen und erzeugt in dem Ebenenbüschel um eine beliebige Gerade h eine involutorische Korrespondenz $[n + s - \lambda]$, deren Koinzidenzen den Grad von R_g liefern. Abzuziehen sind dabei die Koinzidenzen, welche durch die sich selbst entsprechenden Punkte von (G) entstehen, das sind zwei Punkte auf jeder Erzeugenden e . Die verbleibenden Koinzidenzen zählen doppelt, folglich ist der Grad der Regelfläche R_g

$$n + s - 2\lambda = m' + n'$$

in Übereinstimmung mit dem bekannten Satz über die Regelfläche der Kongruenzstrahlen, welche eine Gerade schneiden ¹⁾.

merkung zu Ende von Nr. 15 angegebenen Fall angewendet, für die Ordnung und Klasse die Zahl 1, in Übereinstimmung mit dem dort direkt abzuleitenden Resultat.

¹⁾ Vgl. R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 41.

22. Es ist $n + s - 2\lambda = m' + n'$,
 nach Nr. 11 ist $n = m' + n'$,
 hieraus folgt $s = 2\lambda$

$$m' = n - \frac{s}{4}$$

$$n' = \frac{s}{4}.$$

Nach Nr. 16 (1) ist $n = \kappa + \lambda + \mu$,
 folglich $n \geq \lambda$

$$n \geq \frac{s}{2},$$

andererseits ist $m' - n' = n - \frac{s}{2}$

d. h. $m' \geq n'$.

In einem R-Strahlensystem, in dem die Regel-
 flächen 2. Grades als Flächen 2. Klasse auftreten, ist
 immer die Ordnung größer als die Klasse oder höchstens
 ihr gleich.

Zwei Kurven (S) schneiden sich in den n Punkten,
 welche den gemeinsamen Punkten der ihnen ent-
 sprechenden Kurven (N) entsprechen und außerdem
 in den $2(\mu + \nu)$ Fundamentalpunkten D und F. Durch
 die Erzeugenden von R^n werden sie eindeutig aufein-
 ander bezogen und umgekehrt erzeugen sie durch diese
 ihre ein-eindeutige Beziehung, in der ihre gemeinsamen
 Punkte sich selbst entsprechende Punkte sind, die
 Fläche R^n . Zwei eindeutig aufeinander bezogene
 Kurven von der Ordnung s mit $n + 2(\mu + \nu)$ sich
 selbst entsprechenden Punkten erzeugen eine Regel-
 fläche von der Ordnung

$$2s - n - 2(\mu + \nu) = n.$$

Hieraus $s = n + \mu + \nu$

$$s \geq n.$$

Es ist also immer $2n \geq s \geq n$.

$$\begin{array}{ll} \text{Nun sei} & m' = 3n' + a \\ \text{d. h.} & n - \frac{s}{4} = \frac{3}{4}s + a \\ & n = s + a \\ & s = n - a \\ \text{da} & s \geq n \\ \text{ist, muß} & a \leq 0 \end{array}$$

sein, d. h. die Ordnung kann in einem solchen Strahlensystem das Dreifache der Klasse nicht übersteigen. Die duale Betrachtung, bei der die Regelscharen als Flächen 2. Ordnung auftreten und nicht die Punkte der Fläche R^n einander involutorisch zugeordnet werden, sondern die Tangentialebenen, ergibt ebenso, daß dort die Klasse immer größer ist als die Ordnung und das Dreifache der Ordnung nicht übersteigen kann. Dies gibt zusammengefaßt:

In einem Strahlensystem, welches unendlich viele Regelflächen 2. Grades und keine singulären Kurven enthält, kann die größere der beiden Zahlen Ordnung und Klasse das Dreifache der kleineren nicht übersteigen.

Daß diese obere Grenze auch wirklich immer erreicht werden kann, werden die noch folgenden Beispiele von R-Strahlensystemen zeigen. Als spezieller Fall ergibt sich der in der Einleitung erwähnte Fall der Kongruenz (2, 7), welche keine singuläre Kurve besitzt und nach diesem Satz kein R-Strahlensystem sein kann, d. h. kein System von ∞^1 Regelscharen enthalten kann.

§ 6.

Die Brennfläche der R-Strahlensysteme.

23. Die Klasse der Brennfläche läßt sich in folgender Weise bestimmen: Ist eine Gerade g gegeben,

dann ist eine Ebene α durch die Tangentialebene an die Brennfläche, wenn sie zwei benachbarte Strahlen des Strahlensystems enthält. Das tritt dann ein, wenn (S_α) die Ebene α in einem Punkt und infolgedessen auch im involutorisch entsprechenden berührt. An eine Kurve (S_α) gibt es nach Nr. 19 (4)

$$r_s = 2(s + p - 1)$$

Tangentialebenen α' durch g . Einer Ebene α entsprechen also im Ebenenbüschel um g r_s Ebenen α' . Es werden ebenso viele Ebenen α einer Ebene α' entsprechen als es Kurven (S_α) gibt, welche diese Ebene berühren, oder, was dasselbe ist, als es Ebenen α gibt, welche die Kurve $(S_{\alpha'})$ berühren, also wieder r_s . Es entsteht also in dem Ebenenbüschel mit der Achse g eine $[r_s, r_s]$ Korrespondenz, deren $2r_s$ Koinzidenzen auf die Tangentialebenen an die Brennfläche durch g führen. Eine dieser Koinzidenzen liefert dann keine zwei benachbarten Strahlen, wenn der Berührungspunkt ein sich selbst entsprechender Punkt, also ein Punkt einer Erzeugenden e ist. Jede solche Erzeugende e liefert nach Nr. 15 zur Kongruenz eine Regelschar R^2 von Kongruenzstrahlen. Zwei Erzeugende dieser Regelschar c, c' schneiden g . Die der Ebene (gc) entsprechende Kurve (S) hat nach Nr. 18 die Ebene zur Schmiegungeebene, also zählt jede solche Ebene (gc) für zwei Koinzidenzen. Es verbleiben also noch $2r_s - 4\lambda$ Koinzidenzen, welche auf die Klasse der Brennfläche führen. Da jede dieser Ebene Doppeltangentialebene an ihre Kurve (S) ist, ergibt sich für die Klasse der Brennfläche

$$n_1' = r_s - 2\lambda = 2s + 2p - 2\lambda - 2.$$

Aus der bekannten Relation, welche für jedes Strahlensystem gilt

$$m_1' - n_1' = 2(m' - n'),$$

folgt für die Ordnung der Brennfläche:

$$m_1' = 2n + 2s + 2p - 4\lambda - 2.$$

Nach Nr. 22 ist $s = 2\lambda$.

Die Brennfläche der Kongruenz hat die Ordnung $m_1' = 2(n + p - 1)$ und die Klasse $n_1' = s + 2(p - 1)$.

Damit ist nach Nr. 8 auch der Rang r' der Kongruenz gegeben:

$$r' = \frac{s}{4}(n - \frac{s}{4} - 1) - n - p + 1.$$

Da die Größen m' , n' , r' bekannt sind, lassen sich die Resultate, welche für allgemeine Kongruenzen im 1. Teil des 2. Bandes von R. Sturms Liniengeometrie angegeben sind, auf die Kongruenzen C anwenden.

§ 7.

R-Strahlensysteme, erzeugt durch zwei eindeutig aufeinander bezogene Regelflächen.

24. Eine Gruppe von R-Strahlensystemen läßt sich in folgender Weise erzeugen: Die Erzeugenden zweier Regelflächen R_1 , R_2 sind eindeutig aufeinander bezogen, die Punktreihen auf entsprechenden Erzeugenden projektiv. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte bilden ein R-Strahlensystem C. Diese Strahlensysteme gehören zu den von M. Pannelli¹⁾

¹⁾ M. Pannelli, Sopra le congruenze generate da due superficie di cui i punti si corrispondono univocamente. Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma VI, 1890.

untersuchten, da sie durch zwei eindeutig aufeinander bezogene Flächen entstehen, doch wird dort dieser spezielle Fall nicht besonders behandelt. Die dual hierzu erzeugten Strahlensysteme, die dadurch entstehen, daß die projektiven Ebenenbüschel um entsprechende Erzeugende von R_1 und R_2 zum Schnitt gebracht werden, sind ebenfalls R-Strahlensysteme. Im folgenden werden nur die in der ersten Art erzeugten R-Strahlenkongruenzen betrachtet, die Betrachtungen für die nach der zweiten Art entstehenden sind dual.

Durch die Erzeugenden sind zwei beliebige ebene Schnitte von R_1 und R_2 eindeutig aufeinander bezogen, die ebenen Schnittkurven und infolgedessen auch die Regelflächen haben also dasselbe Geschlecht.

Ist ein Fundamentalpunkt D' vorhanden, dem eine Kurve auf der anderen Fläche entspricht, dann kann diese Kurve nur eine endliche Zahl von Erzeugenden schneiden, da ebensoviele durch D' hindurchgehen müssen, d. h. jede solche Kurve muß aus einer Anzahl von Erzeugenden bestehen. Ein Fundamentalpunkt tritt dann und nur dann auf, wenn die projektive Beziehung von zwei entsprechenden Erzeugenden ausartet. Dann liegt auf jeder dieser beiden Erzeugenden ein Fundamentalpunkt, dem sämtliche Punkte der anderen Erzeugenden entsprechen. Also ist die Zahl der Fundamentalpunkte auf beiden Regelflächen dieselbe, dann müssen die beiden Regelflächen gleichen Grad haben¹⁾.

¹⁾ Dies folgt aus einer Formel, welche H. G. Zeuthen angibt: *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces, dont les points se correspondent un-à-un.* Mathem. Annalen Bd. IV, S. 42, Gl. II. Bei der Anwendung dieser Formel ist zu berücksichtigen, daß eine windschiefe Regelfläche keine Kuspidal-

25. Es sei

m der Grad von R_1 und R_2 ,

p' das gemeinsame Geschlecht der beiden Regelflächen,

s' die Ordnung der Kurve auf R_1 bzw. R_2 , welche einem ebenen Schnitt von R_2 bzw. R_1 entspricht,

μ' die Anzahl der Fundamentalpunkte D' auf jeder der beiden Regelflächen, welche die Eigenschaft haben, daß die durch D' gehende Erzeugende die entsprechende Erzeugende schneidet,

ν' die Anzahl der Fundamentalpunkte F' auf jeder der beiden Regelflächen, bei welchen die durch sie hindurchgehende Erzeugende die entsprechende Erzeugende nicht schneidet,

κ' sei die Anzahl der Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden, deren projektive Beziehung nicht ausartet,

λ' sei die Zahl der Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden, welche perspektiv zueinander liegen.

26. Ähnlich wie in Nr. 16 läßt sich wieder die Zahl der sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden direkt bestimmen: Nimmt man zwei Ebenen α und β , die sich in einer Geraden g schneiden, dann sind die Schnittkurven (R_1) und (R_2) von α mit R_1 und R_2 durch die entsprechenden Erzeugenden eindeutig aufeinander bezogen; durch jeden Punkt von g gibt es in α 2 m Strahlen l , auf welchen zwei entsprechende

kurve und keine abwickelbare Fläche von stationären Tangentialebenen besitzt und daß die Ordnung des Tangentialkegels aus einem beliebigen Punkt an die Regelfläche $2(p' + m - 1)$ ist, wenn m ihre Ordnung, p' ihr Geschlecht ist.

Punkte von (R_1) und (R_2) liegen. Die Schnittkurven derselben Regelfläche mit α und β sind durch die Erzeugenden dieser Regelfläche eindeutig aufeinander bezogen. Zieht man zu den Strahlen l die entsprechenden in β , dann entsteht auf der Geraden g eine $[2m, 2m]$ Korrespondenz, zu deren $4m$ Koinzidenzen die $2m$ Schnittpunkte von g mit R_1 und R_2 gehören, während die übrigen Koinzidenzen auf die sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden der beiden Regelflächen führen. Hieraus folgt

$$2m = \mu' + \kappa' + \lambda'.$$

Als verbunden sollen zwei singuläre Ebenen bezeichnet werden, wenn die Kurven von Kongruenzstrahlen in ihnen die Schnittlinie der Ebenen zur gemeinsamen Tangente haben.

Das Strahlensystem C hat $2m$ singuläre Ebenen ε_2 mit Kurven 2. Klasse von Kongruenzstrahlen, unter denen $\mu' + \lambda'$ zerfallende Kurven 2. Klasse sind. Es hat $2\nu'$ singuläre Ebenen ε_1 mit Strahlenbüscheln von Kongruenzstrahlen, welche paarweise verbunden sind.

Das konfokale Strahlensystem C' , welches aus den Leitscharen der Regelscharen besteht, hat in den Ebenen ε_2 dieselbe Kurve von Kongruenzstrahlen wie C . Je zwei verbundene von den $2\nu'$ Strahlenbüscheln in den Ebenen ε_1 führen auf zwei verbundene Strahlenbüschel von C' mit denselben Mittelpunkt aber vertauschten Ebenen.

27. Einem ebenen Schnitt (R_1) entspricht auf R_2 eine Kurve (S_2') von der Ordnung s' , deren s' Schnittpunkte mit (R_1) auf die Kongruenzstrahlen in der Ebene von (R_1) führen.

Die Kongruenz C hat die Klasse $n' = s'$. (7)

Projiziert man, entsprechend wie in Nr. 20 die beiden Regelflächen R_1 und R_2 aus einem beliebigen Punkte P in eine Ebene ε , dann entsteht in dieser eine Korrespondenz $[m, m]$, in der jeder Geraden eine Kurve von der Ordnung s' entspricht. Eine solche Korrespondenz hat $2m + s'$ Koinzidenzen¹⁾, welche die Anzahl der Kongruenzstrahlen durch P angeben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß diejenigen Punkte, welche die Projektionen der Schnittpunkte der λ' Paare von entsprechenden Erzeugenden darstellen, auf keine Kongruenzstrahlen führen.

Die Kongruenz C hat die Ordnung $m' = 2m + s' - \lambda'$. (8)

28. Der Kegel, welcher eine Kurve (S') projiziert, hat (vgl. Nr. 19) die Klasse

$$r_s' = 2(s' + p' - 1).$$

Betrachtet man, entsprechend wie in Nr. 23, das Ebenenbüschel um eine Gerade g und ordnet einer Ebene α in ihm die r_s' Berührungsebenen α' an die Kurve (S_{α}') von R_1 zu, dann bilden die Ebenen α und α' eine $[r_s', r_s']$ Korrespondenz, deren $2r_s'$ Koinzidenzen die Klasse der Brennfläche der Kongruenz angeben. Damit ist auch wieder die Ordnung der Brennfläche und der Rang der Kongruenz gegeben.

Die Brennfläche hat die Ordnung $m_1' = 2(2m - \lambda') + 4(s' + p' - 1)$ und die Klasse $n_1' = 4(s' + p' - 1)$.

Die Kongruenz C hat den Rang $r' = (2m + s' - \lambda' - 2)(s' - 1) - 2p'$.

Die Werte für Ordnung und Klasse der Brennfläche stimmen mit den von Pannelli auf anderem

¹⁾ Vgl. die erste Anmerkung zu Nr. 20 oder R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 39.

Wege abgeleiteten Werten überein, nur ist beim Vergleich mit den dortigen Werten $\lambda' = 0$ zu setzen, da in der erwähnten Abhandlung sich selbst entsprechende Punkte auf der Schnittkurve der beiden Flächen nicht vorausgesetzt sind. In nächsten Paragraphen werden solche Punkte auftreten.

29. Zur näheren Betrachtung der Brennfläche soll die Fläche R_1 nach dem Vorgang von M. Pannelli auf eine vielfache Ebene ω abgebildet werden: Jeder Punkt von R_1 ist Pol eines Kongruenzstrahls, der ihn mit seinem entsprechenden von R_2 verbindet. P wird dem Schnittpunkte dieses Kongruenzstrahles mit ω zugeordnet. Durch einen Punkt von ω gehen m' Kongruenzstrahlen, deren m' Pole dem Punkte der Ebene entsprechen. Die Ebene ist also m' -fach. Einer Geraden der Ebene entspricht eine Kurve (G) auf der R_1 . In der Ebene wird eine Grenzkurve auftreten, welche von denjenigen Punkten gebildet wird, von deren entsprechenden Punkten auf der R_1 zwei zusammenfallen. Diese Grenzkurve ist der Schnitt der Brennfläche der Kongruenz mit der Ebene ω . H. G. Zeuthen¹⁾ hat eine Formel für die Ordnung m_1' der Grenzkurve angegeben, welche in der hier angewendeten Beziehung lautet:

$$m_1' = 2(P - 1) + 2m'.$$

Dabei bedeutet P das Geschlecht der Kurven (G). Da nach Nr. 27 $m' = 2m + s' - \lambda'$ und nach Nr. 28 $m_1' = 2(2m - \lambda') + 4(s' + p' - 1)$ ist, ergibt sich $P = s' + 2p' - 1$.

¹⁾ Addition au mémoire sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Mathem. Annalen Bd. III, S. 323.

30. Da jetzt P bekannt ist, lassen sich mit Hilfe weiterer Formeln, welche H. G. Zeuthen angibt¹⁾, die Klasse und die Zahl der stationären Tangenten einer ebenen Schnittkurve der Brennfläche angeben. Für die Anwendung dieser Formeln ist zu berücksichtigen: Fundamentalpunkte der R_1 , d. h. solche, denen eine Kurve in der Ebene ω entspricht, sind die Punkte D' und F' , die Schnittpunkte der λ' Paare von Erzeugenden und die Pole der Kongruenzstrahlen, welche in ω liegen. Die sämtlichen Fundamentalpunkte sind einfache Punkte der R_1 ; die Ebene ω besitzt keine Fundamentalpunkte. Dann ergibt sich aus Formel [2] bei Zeuthen: die Klasse eines ebenen Schnittes der Brennfläche ist

$$N' = 2m + 4p' + 6s' + \mu' + \nu' - 4.$$

Aus Formel [3] daselbst ergibt sich die Zahl der stationären Tangenten desselben

$$C' = 24(p' + s' - 1).$$

Aus den Plückerschen Formeln folgt dann:

*Die Brennfläche hat eine Doppelkurve von der Ordnung $\frac{1}{2}m_1'(m_1' - 10) + 4N' - \frac{3}{2}C'$ und eine Kuspidal-
kurve von der Ordnung $3m_1' - 3N' + C'$.*

Führt man statt des Punktfeldes ω ein Ebenenbündel O ein, in das die Regelfläche abgebildet wird, indem einem Punkte der Regelfläche die Ebene durch O entspricht, welche den von ihm ausgehenden Kongruenzstrahl enthält, dann tritt an Stelle der Grenzkurve ein Grenzkegel auf. Fundamentalpunkte sind

¹⁾ Vgl. die in der zweiten Anmerkung zu Nr. 24 angegebene Abhandlung S. 48.

hier die Punkte D' , F' , die Schnittpunkte der λ' Paare von Erzeugenden und die Pole der Kongruenzstrahlen, welche durch O gehen. Dann ergibt sich analog für die Ordnung des Tangentialkegels an die Brennfläche

$$N' = 2m + 4p' + 6s' + \mu' + \nu' - 4,$$

für die Zahl der Kupidalkanten des Tangentialkegels

$$C' = 24(p' + s' - 1).$$

Hieraus ergibt sich:

Die Brennfläche besitzt einen Torsus von Doppeltangentialebenen von der Klasse $\frac{1}{2} n_1'(n_1' - 10) + 4N' - \frac{3}{2} C'$ und einen Torsus von stationären Tangentialebenen von der Klasse $3n_1' - 3N' + C'$.

§ 8.

Die durch zwei kollineare Regelflächen erzeugten R-Strahlensysteme.

31. Es seien wieder zwei in derselben Weise wie in Nr. 24 eindeutig aufeinander bezogene Regelflächen gegeben, deren Beziehung aber die weitere Eigenschaft hat, daß immer drei Punkten der einen Regelfläche, welche auf einer Raumgeraden liegen, drei Punkte der anderen Regelfläche entsprechen, welche ebenfalls in einer Geraden liegen.

Es läßt sich geometrisch zeigen, daß zwei solche Regelflächen immer eine räumliche Kollineation bestimmen, in der sie sich entsprechen. Eine Tangentialebene ε schneidet die erste Regelfläche in einer Erzeugenden e_1 und einer Restkurve c_1^{n-1} . Zwei Punkten A_1 , B_1 auf e_1 entsprechen zwei Punkte A_2 , B_2 auf der entsprechenden Erzeugenden e_2 . C_1 sei ein Punkt

von c_1^{n-1} , C_2 der ihm entsprechende von R_2 . Irgendein weiterer Punkt D_1 von c_1^{n-1} werde mit C_1 verbunden. Der Schnittpunkt von C_1D_1 mit e_1 sei E_1 . E_2 liegt auf e_2 , D_2 muß auf C_2E_2 liegen, d. h. in der Ebene $A_2B_2C_2$. Dies gilt für sämtliche Punkte, welche den Punkten der Kurve c_1^{n-1} entsprechen, folglich entspricht der Restkurve c_1^{n-1} die Restkurve c_2^{n-1} in der Ebene $A_2B_2C_2 - \varepsilon_2$. Durch die Punktpaare A, B, C, D ist die Beziehung zwischen den Ebenen ε_1 und ε_2 festgelegt. Nimmt man X_1 auf c_1^{n-1} an, so findet man X_2 von c_2^{n-1} so, als wären die Ebenen ε_1 und ε_2 durch die vier Punktpaare kollinear aufeinander bezogen, einer Tangentialebene von R_1 entspricht folglich kollinear eine ebensolche von R_2 . Die beiden Regelflächen sind durch die Zuordnung von fünf Punktpaaren kollinear aufeinander bezogen: Die Punktpaare A, B, C in ε_1 und ε_2 mögen sich wieder entsprechen, außerdem sollen den Punkten D_1 und E_1 auf einer Erzeugenden von R_1 die Punkte D_2 und E_2 auf einer Erzeugenden von R_2 entsprechen. Dann müssen die Schnittpunkte F_1 und F_2 dieser beiden Erzeugenden mit den Ebenen ε_1 bzw. ε_2 sich entsprechen. Damit ist die kollineare Beziehung der beiden Tangentialebenen festgelegt. Um nun zu einem Punkt X_1 den entsprechenden zu konstruieren, schneidet man ε_1 mit X_1D_1 und X_1E_1 in V_1 und W_1 , dann liegen V_1, W_1, E_1 in ε_1 auf einer Geraden, desgleichen V_2, W_2, E_2 in ε_2 und V_2D_2 und W_2E_2 schneiden sich in X_2 . Die fünf Punktpaare A, B, C, D, E genügen aber gleichzeitig zur Festlegung einer räumlichen Kollineation, in welcher in ganz derselben Weise X_2 gefunden wird.

Eine Ausnahme machen die Regelflächen 2. Grades, deren kollineare Beziehung schon durch vier Punkte

festgelegt ist. Wählt man auf je einer Erzeugenden jedes Systems zwei Punkte und ordnet diesen vier ebensolche Punkte der anderen Regelfläche zu, dann ist damit die kollineare Beziehung der Regelflächen 2. Grades festgelegt.

32. Es seien jetzt zwei kollineare Regelflächen n ten Grades R_1^n und R_2^n vom Geschlecht p gegeben. Durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte erzeugen sie ein R-Strahlensystem C. G. Loria¹⁾ hat diese Strahlensysteme behandelt als Spezialfall derjenigen Strahlensysteme, welche durch zwei kollineare algebraische Flächen entstehen. Die Fläche R_1^n und infolgedessen auch R_2^n soll die Ecken des Haupttetraeders der Kollineation A, B, C, D zu $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma, \varphi_\delta$ -fachen Punkten haben. Das sind dann sich selbst entsprechende Punkte auf der Schnittkurve der beiden Regelflächen. Weitere spezielle Voraussetzungen sollen nicht gemacht werden. Es sei

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi &= \varphi_\alpha + \varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta \\ \Sigma\varphi_\alpha &= \varphi_\beta + \varphi_\gamma + \varphi_\delta.\end{aligned}$$

Dann ist, dies auf den Fall des vorigen Paragraphen angewendet, $m = n$, $p' = p$, $\mu' = 0$, $\nu' = 0$, $\lambda' = \Sigma\varphi$, $\kappa' = 2n - \Sigma\varphi$, $s' = n$. Es folgt sodann aus Nr. 27, 28, 30:

Die Kongruenz C hat die Ordnung $m' = 3n - \Sigma\varphi$, die Klasse $n' = n$, den Rang $r' = (3n - \Sigma\varphi - 2)(n - 1) - 2p$. Ihre Brennfläche hat die Ordnung $m_1' = 8m + 4p - 2\Sigma\varphi - 4$, die Klasse $n_1' = 4(n + p - 1)$, eine

¹⁾ Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale. Atti della Reale Accademia di Torino XIX, S. 858 ff.

Doppelkurve von der Ordnung $\frac{1}{2} m_1' (m_1' - 10) + 4 n_1' +$
 $+ 7 n$, eine Kuspidakurve von der Ordnung $3 (m_1' +$
 $+ n_1' - 4 n)$, einen Torsus von Doppeltangentialebenen
von der Klasse $\frac{1}{2} n_1' (n_1' - 20) + 16 n$ und einen Torsus
von stationären Tangentialebenen von der Klasse $6 (n_1' -$
 $- 2 n)$.

33. Die Kongruenz C ist im tetraedralen Komplex enthalten, der durch die kollineare Beziehung bestimmt wird, folglich sind die Kongruenzstrahlen in einer Ebene Tangenten eines Kegelschnittes, zu dessen Tangenten auch die Schnittlinien der Ebene mit den Ebenen des Haupttetraeders gehören. Die Kongruenzstrahlen durch einen Punkt liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung, der durch die vier Tetraederecken geht.

Eine Tetraederkante, z. B. AB verbindet $n - (\varphi_\alpha + \varphi_\beta)$ Paare entsprechender Punkte der beiden Regelflächen, ist also ein Kongruenzstrahl von dieser Vielfachheit. Weitere mehrfache Strahlen können nur als Verbindungsstrahlen entsprechender mehrfacher Punkte der beiden Regelflächen auftreten. Die beiden Regelflächen haben je eine Doppelkurve von der Ordnung

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p.$$

Dabei zählt eine ν -fache Kurve als $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ -fache Doppelkurve. Die Verbindungsstrahlen der entsprechenden Punkte dieser beiden sich kollinear entsprechenden Doppelkurven bilden eine Regelfläche von Doppelstrahlen der Kongruenz. In dem Ebenenbüschel um eine beliebige Gerade g entsteht durch die ent-

sprechenden Punkte der beiden Doppelkurven eine $[d, d]$ Korrespondenz, deren $2d$ Koinzidenzen den Grad dieser Regelfläche angeben, wenn man die $(\varphi_2^\alpha) + (\varphi_2^\beta) + (\varphi_2^\gamma) + (\varphi_2^\delta)$ Koinzidenzen nach den Tetraederecken abzieht.

Die Kongruenz C enthält eine Regelfläche von Doppelstrahlen vom Grad $(n-1)(n-2) - 2p - \frac{1}{2} \Sigma \varphi^2 + \frac{1}{2} \Sigma \varphi$, bei der jeder v -fache Strahl für $\frac{v(v-1)}{2}$ Doppelstrahlen zählt.

34. Behält man das Haupttetraeder der Kollineation bei und wählt irgend zwei Punkte auf einem Komplexstrahl des tetraedralen Komplexes T als entsprechende Punkte, so erhält man eine neue räumliche Kollineation, welche denselben Komplex T erzeugt. Man bekommt so eine Schar kollinearere Räume, in der jeder Punkt denjenigen Komplexstrahl beschreibt, der ihn mit seinem entsprechenden verbindet¹⁾. Eine Gerade durchläuft eine Regelschar. Der Fläche R_1^n entsprechen in der Schar kollinearere Räume Flächen $R_{1'}^n$. Irgend zwei Flächen $R_{v'}^n$ führen wieder auf das Strahlensystem C.

Die Kongruenz C entsteht auf ∞^2 Arten durch zwei kollineare Regelflächen R^n .

Unter den ∞^1 Flächen $R_{v'}^n$ befinden sich vier, welche in ebene Kurven n -ter Klasse ausarten: In der

¹⁾ Th. Reye, Geometrie der Lage III, 1. Vortrag. — R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 347. Dasselbe dual.

Schar kollinearer Räume beschreibt ein Punkt P_1 einen Strahl. Durchschneidet er dabei im Punkt P_μ eine der Haupttetraederebenen, etwa α , dann artet die Kollineation der Räume Σ_1 und Σ_μ in folgender Weise aus: Dem Strahlenbündel $A (B, C, D, P_1)$ entspricht kollinear das Punktfeld $\alpha (B, C, D, P_\mu)$. Jedem Punkt X_1 auf Σ_1 durch A entspricht der Punkt X_μ in α . Der Regelfläche R_1^n entspricht dann eine Kurve n -ter Klasse in α , welche die Regelfläche R_μ^n darstellt. Da der Punkt A $\varphi\alpha$ -facher Punkt von R_1^n ist, trennen sich von der R_μ^n α Strahlenbüschel ab, welche den α Büscheln von Tangentialebenen aus A an die R_1^n entsprechen. Die Kurve n -ter Klasse zerfällt also in $\varphi\alpha$ Strahlenbüschel und eine Kurve von der Klasse $n - \varphi\alpha$.

35. Es sollen die singulären Ebenen und Punkte von C bestimmt werden: Eine Ebene kann nur in zwei Fällen singulär werden, entweder sie schneidet die beiden Regelflächen R_1^n und R_2^n in zwei entsprechenden Kurven, oder sie enthält zwei entsprechende Erzeugende der beiden Regelflächen. Weitere singuläre Ebenen gibt es nicht. Das erstere ist bei den Ebenen des Haupttetraeders der Fall. Die Tetraederebene α z. B. schneidet die beiden Regelflächen in zwei entsprechenden Kurven n -ter Ordnung, welche $\Sigma\varphi\alpha$ Punkte entsprechend gemeinsam haben (Nr. 32). Durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte erzeugen sie eine Kurve von Kongruenzstrahlen von der Klasse $2n - \Sigma\varphi\alpha$ in α . $\Sigma\varphi$ Paare von entsprechenden Erzeugenden schneiden sich in den Tetraedereckpunkten. Sie führen durch ihre perspektive Beziehung auf Kurven 2. Klasse von Kongruenzstrahlen, welche in zwei Strahlenbüschel zerfallen. Die $2n - \Sigma\varphi$ noch ver-

bleibenden Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden liefern singuläre Ebenen 2. Grades der Kongruenz mit nicht zerfallenden Kurven. In einer Ebene durch einen Tetraedereckpunkt z. B. durch A liegen $n - \varphi_\alpha$ Kongruenzstrahlen, welche nicht durch A hindurchgehen, folglich ist A singulär vom Grade φ_α . Der singuläre Kegel besteht aus den φ_α Strahlenbüscheln mit dem Zentrum A, welche durch die sich in A schneidenden entsprechenden Erzeugenden entstehen. Weitere singuläre Punkte gibt es nicht, denn jeder singuläre Punkt würde, mit irgendeiner Kante des Haupttetraeders verbunden, eine Ebene mit mehr als n Strahlen liefern, d. h. eine weitere singuläre Ebene.

Die Kongruenz C hat je eine singuläre Ebene vom Grade $2n - \Sigma\varphi_\alpha$, $2n - \Sigma\varphi_\beta$, $2n - \Sigma\varphi_\gamma$, $2n - \Sigma\varphi_\delta$, $2n - \Sigma\varphi$ singuläre Ebenen ε_2 , weiter $\Sigma\varphi$ singuläre Ebenen ε_2' mit zerfallenden Kurven 2. Klasse. φ_α , φ_β , φ_γ , φ_δ dieser Strahlenbüschel haben je denselben Mittelpunkt, folglich tritt je ein singulärer Punkt vom Grad φ_α , φ_β , φ_γ , φ_δ auf.

36. Eine Erzeugende von R_1^n beschreibt in der Schar kollinearere Räume eine Regelschar, deren Leit-schar zu C gehört, während die Regelschar in der konfokalen Kongruenz C' enthalten ist. Nach Nr. 9 ist die Tetraederebene α z. B. für C' singulär vom Grade

$$3n - \Sigma\varphi - (2n - \Sigma\varphi_\alpha) = n - \varphi_\alpha.$$

Die Kurve von Kongruenzstrahlen in α ist diejenige von den in Nr. 34 erwähnten ausgearteten Flächen R_{1c}^n , welche in α liegt. Diese Kurve berührt

die Tetraederkanten nicht, da die Tetraederebenen nicht Tangentialebenen der R_1^n sind. In den Ebenen ε_2 und ε_2' hat C' dieselbe Kurve von Kongruenzstrahlen wie C .

Die Kongruenz C' hat je eine singuläre Ebene vom Grade $n - \varphi_\alpha, n - \varphi_\beta, n - \varphi_\gamma, n - \varphi_\delta, 2n - \Sigma\varphi$ singuläre Ebenen $\varepsilon_2, \Sigma\varphi$ singuläre Ebenen ε_2' mit zerfallenden Kurven 2. Klasse, von denen je $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \varphi_\gamma, \varphi_\delta$ einen Büschelmittelpunkt gemeinsam haben.

37. Wenn eine Kongruenz C' identisch wäre mit einer Kongruenz C , dann hätte sie mit dieser gleiche Ordnung und Klasse, d. h. es wäre $n' = n, \Sigma\varphi' = \Sigma\varphi$. Die Summe der Singularitäten müßte in beiden Kongruenzen gleich sein, d. h. die Summe der Gradzahlen der vier Tetraederebenen müßte in beiden Fällen dieselbe sein, da die übrigen Singularitäten gleich sind. D. h.

$$\begin{aligned} 2n - \Sigma\varphi_\alpha + 2n - \Sigma\varphi_\beta + 2n - \Sigma\varphi_\gamma + 2n - \Sigma\varphi_\delta &= \\ &= n' - \varphi_{\alpha'} + n' - \varphi_{\beta'} + n' - \varphi_{\gamma'} + n' - \varphi_{\delta'} \end{aligned}$$

hieraus $\Sigma\varphi = 2n$.

Es müßte sich um eine Kongruenz mit gleicher Ordnung und Klasse handeln. Das Haupttetraeder der Kongruenz C' wäre dasselbe wie das ihrer konfokalen Kongruenz, da es durch die Spitzen der singulären Kegel bestimmt ist. Die Tetraederkanten müßten vielfache Strahlen der Kongruenz sein, die singulären Kurven von C' in den Tetraederebenen würden die Tetraederkanten berühren, was im allgemeinen nicht eintritt.

Durch zwei kollineare Regelflächen R^n entsteht ein R-Strahlensystem C , dessen konfokales R-Strahlensystem

C' außer im Falle $n = 2$ nicht durch zwei kollineare Regelflächen erzeugt werden kann.

Der Fall zweier kollinearer Regelflächen 2. Grades¹⁾ bildet bei den ganzen hier durchgeführten Betrachtungen eine Ausnahme. Das Auftreten von zwei Scharen von Erzeugenden bedingt andere Singularitäten, da jede Schar Paare von sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden liefert.

Zwei ebene Schnitte (N) von R_1 beschreiben in der Schar kollinear Räume zwei Regelflächen vom Grade $2n$. Diese beiden Regelflächen sind durch die Erzeugenden von R_1 und durch die Schar kollinear Räume ein-eindeutig aufeinander bezogen, durch die Verbindungsstrahlen ihrer entsprechenden Punkte erzeugen sie die Kongruenz C' . Nimmt man als ebene Schnitte die Restkurven zweier Tangentialebenen, dann entstehen zwei Regelflächen vom Grade $2(n-1)$. Im Falle $n=2$ liefert dies die bei Th. Reye auseinander-gesetzte Erzeugung der zur $(6,2)$ konfokalen Kongruenz $(6,2)$ durch zwei kollineare Regelflächen 2. Grades.

38. Angenommen es gäbe ein R-Strahlensystem, in dem durch jeden Strahl des Systems zwei Regelscharen hindurchgehen. Existieren verschiedene Systeme von Regelscharen, welche die Kongruenz erfüllen (wie z. B. bei $(2,6)_{II}$), dann soll nur eines derselben berücksichtigt werden. Greift man eine beliebige Regelschar des Systems heraus, dann geht durch jede ihrer

¹⁾ Th. Reye, Über das Strahlensystem 2. Klasse 6. Ordnung von der ersten Art. Journal für Mathematik Bd. 93. — Th. Reye, Geometrie der Lage, III, 6. Vortrag. — R. Sturm, Liniengeometrie I, S. 373 ff., II, S. 285 ff.

Erzeugenden der einen Art eine weitere Regelschar. Die Gesamtheit dieser Regelscharen bildet das Regelscharsystem. Da die herausgegriffene Regelschar ganz beliebig war, folgt hieraus, daß sich irgend zwei Regelscharen des Systems immer in einer Erzeugenden schneiden. Greift man irgend zwei Regelscharen R_1^2 und R_2^2 heraus, dann kann das Strahlensystem aufgefaßt werden als das Erzeugnis dieser eindeutig aufeinander bezogenen Regelscharen. In der Beziehung entspricht jedem Strahl der einen Regelschar ein ebensolcher der anderen. Diese beiden Regelflächen 2. Grades sind also nach Art der Nr. 24 aufeinander bezogen. Dabei entspricht einer Erzeugenden der Leitschar eine Kurve n ter Ordnung auf der anderen Fläche. Unter den Regelscharen der Kongruenz befindet sich auch R_1^2 und R_2^2 . Es treten wieder Ebenen ε auf, in welchen sich entsprechende Erzeugende der beiden Regelflächen schneiden, welche auf Kurven 2. Klasse von Kongruenzstrahlen führen. Durch jeden solchen Kongruenzstrahl geht noch eine zweite Regelschar, welche mit ε eine Gerade ihrer Leitschar gemeinsam hat. Diese Geraden stellen die Verbindungslinien entsprechender Punkte von R_1^2 und R_2^2 dar und da ε Tangentialebene an diese beiden Regelflächen ist, liegen diese entsprechenden Punkte auf den Erzeugenden der Leitscharen von R_1^2 und R_2^2 in ε . Die Kurve n ter Ordnung ist mithin eine Erzeugende der Leitschar auf der anderen Regelfläche. Die beiden Regelflächen R_1^2 und R_2^2 sind demnach so aufeinander bezogen, daß ihre beiden Scharen von Erzeugenden sich entsprechen. Da unter den Regelscharen des so entstehenden Strahlensystems auch R_1^2 und R_2^2 auftreten sollen, müssen sich je zwei entsprechende Erzeugende der Leitscharen

auf der gemeinsamen Erzeugenden von R_1^2 und R_2^2 schneiden. Jede Ebene durch zwei solche Erzeugende ist aber eine singuläre Ebene 2. Grades der Kongruenz, die mithin einen Torsus von der Klasse 3 von singulären Ebenen zweiten Grades enthält, es ist dies der Torsus der gemeinsamen Tangentialebenen von R_1^2 und R_2^2 nach Wegfall des Ebenenbüschels um die gemeinsame Erzeugende. Das Strahlensystem ist dual zum Doppelsekantensystem einer Raumkurve 3. Ordnung, kein R-Strahlensystem, da es einen Torsus von singulären Ebenen besitzt. Ganz analog gestaltet sich der Schluß, wenn durch jeden Kongruenzstrahl k Regelscharen hindurchgehen. Hier entsprechen nur jeder Erzeugenden von R_1^2 $k - 1$ Erzeugende von R_2^2 und umgekehrt. Daraus folgt:

Es gibt kein R-Strahlensystem, in welchem durch jeden Kongruenzstrahl $k > 1$ Regelflächen 2. Grades hindurchgehen.

Das Vorhergehende führt auf einen merkwürdigen Spezialfall des durch zwei kollineare Regelflächen 2. Grades entstehenden Strahlensystems: Geht die R_1^2 durch zwei sich kollinear entsprechende Strahlen hindurch, so daß sie von einer ihrer Erzeugenden in der Schar kollinearer Räume beschrieben wird, dann ist das durch R_1^2 und R_2^2 entstehende Strahlensystem dual zur Doppelsekantenkongruenz einer Raumkurve 3. Ordnung, also ein Strahlensystem (3, 1).

Lebenslauf.

Ich, Richard Baldus, bin den 11. Mai 1885 in Salonik (europ. Türkei) geboren als Sohn des Ehepaares Wilhelm und Elise Baldus (geb. Schusser), bin bayerischer Staatsangehöriger, katholischer Konfession. Mein verstorbener Vater war Stationschef bei den orientalischen Eisenbahnen. Nach dreijährigem Privatunterricht besuchte ich 1894—97 die deutsche Schule in Salonik, trat 1897 in die 3. Klasse des k. Wilhelms-gymnasiums in München ein, das ich 1904 absolvierte. 1904—1909 studierte ich Mathematik und Physik an der Universität München, zugleich war ich Hörer des Polytechnikums. 1904—1905 genügte ich meiner Militärpflicht im k. b. 1. Inf.-Reg. „König“ in München; ich bin jetzt Leutnant der Reserve des Regiments. 1907 unterzog ich mich dem 1. Abschnitt der Prüfung für den Unterricht in Mathematik und Physik, 1909 dem 2. Abschnitt. Seit November 1909 bin ich Assistent am mathematisch-physikalischen Seminar der Universität Erlangen.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten: v. Baeyer, Bitterauf, v. Braunmühl †, Doehlemann, Donle, Geiger, Graetz, Großmann, Günther, Lindemann, Muncker, Pfänder, Pringsheim, v. Rein-

hardtstöttner †, Röntgen, Schmauß, Voß, v. Weber.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Doehlemann für das Thema meiner Abhandlung, sowie ihm wie Herrn Professor Dr. Noether für das tatkräftige Interesse bei der Abfassung derselben meinen ergebensten Dank auszusprechen.

